ADVANCES IN APPLIED MATHEMATICS **21,** 457–472 (1998)
ARTICLE NO. AM980606

Quelques conjectures combinatoires relatives à la formule classique de Chu–Vandermonde

Michel Lassalle

Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

1. INTRODUCTION

Pour tout couple x, y d'indéterminées la formule classique de Chu–Vandermonde énonce

$$\frac{(y-x)_n}{(y)_n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(x)_k}{(y)_k},$$

où on note $(x)_n$ le coefficient hypergéométrique classique défini par $(x)_0 = 1$ et pour $n > 0$, $(x)_n = x\,(x+1)\cdots(x+n-1)$. Le but de cet article est d'étudier le développement en série formelle de cette expression, c'est à dire d'expliciter les coefficients $c_{ij}(n)$ dans la formule

$$\frac{(y-x)_n}{(y)_n} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(n) \frac{x^i}{y^{i+j}}.$$

Ce problème semble n'avoir jamais été traité auparavant dans la littérature. Notre approche repose sur l'introduction de deux notions combinatoires entièrement nouvelles. Ces deux notions remarquablement simples, que nous présentons aux Sections 2 et 3, fournissent l'outil essentiel de cet article. Nous les étudierons ailleurs de manière plus approfondie [2, 3].

2. COEFFICIENT BINOMIAL GÉNÉRALISÉ

Le cadre général de ce travail est la théorie classique des partitions, pour laquelle nous renvoyons le lecteur au livre de Macdonald [5, Chap. 1, Sect. 1]. Une partition λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs.

0196-8858/98 $25.00

On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la longueur de λ. On note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $n = l(\lambda)$. On dit que $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ est le poids de λ, et pour tout entier $i \geq 1$ que $m_i(\lambda) = \operatorname{card}\{j\colon \lambda_j = i\}$ est la multiplicité de i dans λ. On pose

$$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!.$$

On note λ' la partition conjuguée de λ, définie par $\lambda'_i = \operatorname{card}\{j\colon \lambda_j \geq i\}$. On identifie λ à son diagramme de Ferrers $\{(i,j)\colon 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ et λ' au diagramme $\{(i,j)\colon (j,i) \in \lambda\}$. On note 1^n la partition-colonne $(1, \dots, 1)$ de longueur n et (n) la partition conjuguée de longueur 1.

Le Chapitre 1 de [5] présente plusieurs généralisations du coefficient binomial classique, obtenues dans le cadre de la théorie des partitions (voir les Exemples 1.3.1, 1.3.4, et 1.3.10). La généralisation que nous présentons maintenant est apparemment nouvelle.

DÉFINITION. Soient λ une partition et r un entier ≥ 0. On note $\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle$ le nombre de façons dont on peut choisir r points dans le diagramme de λ de telle sorte que *au moins un point soit choisi sur chaque ligne de* λ.

On a évidemment

$$\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle = 0, \qquad \text{si } r < l(\lambda) \text{ ou si } r > |\lambda|.$$

De même il est clair que

$$\left\langle {\lambda \atop |\lambda|} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle {\lambda \atop |\lambda| - 1} \right\rangle = |\lambda| - m_1(\lambda),$$

$$\left\langle {\lambda \atop l(\lambda)} \right\rangle = \prod_{i \geq 1} \lambda_i.$$

Plus généralement on a immédiatement

$$\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle = \sum_p \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \binom{\lambda_i}{p_i},$$

où la somme est prise sur tous les multi-entiers $p = (p_1, \dots, p_{l(\lambda)})$, avec $\sum_{i=1}^{l(\lambda)} p_i = r$ et $p_i \neq 0$ pour tout i. En d'autres termes, les quantités $\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle$ possèdent la fonction génératrice suivante:

$$\sum_{r \geq 0} \left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle x^r = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \left[(1+x)^{\lambda_i} - 1 \right].$$

Soit $X = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ une famille infinie d'indéterminées indépendantes. Pour tous entiers $j, k \geq 0$ on note

$$P_{jk}(X) = \sum_{|\mu|=j} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} \Big(\prod_{i \geq 1} X_i^{m_i(\mu)} \Big).$$

On observera que

—la sommation est en fait limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leq k$. $P_{jk}(X)$ est ainsi un polynôme de degré k,

—on a $P_{jk}(X) = 0$ pour tout $k > j$.

On pose par convention $P_{00}(X) = 1$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on a

$$\begin{aligned} P_{j1}(X) &= X_j \qquad (j \geq 1), \\ P_{j2}(X) &= \tfrac{1}{2}(j-1)X_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j_1+j_2=j} X_{j_1}X_{j_2} \qquad (j \geq 2), \\ P_{j3}(X) &= \tfrac{1}{6}(j-1)(j-2)X_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j_1+j_2=j} (j_1 - 1)X_{j_1}X_{j_2} \\ &\quad + \tfrac{1}{6} \sum_{j_1+j_2+j_3=j} X_{j_1}X_{j_2}X_{j_3} \qquad (j \geq 3). \end{aligned}$$

Dans ces expressions les entiers j_k sont toujours choisis strictement positifs.

3. GÉNÉRALISATION DES SOMMES DE PUISSANCES

Dans toute la suite de cet article, on fixe désormais un nombre réel positif α. Pour toute partition λ et tout entier $k \geq 0$, on note

$$d_k(\lambda) = \sum_{(i,j)\in\lambda} \left(j - 1 - \frac{1}{\alpha}(i-1) \right)^k.$$

En effectuant la sommation ligne par ligne, on voit facilement que $d_k(\lambda)$ est un polynôme inhomogène de degré $k+1$ en les variables $\{\lambda_i, 1 \leq i \leq l(\lambda)\}$, et un polynôme de degré k en $1/\alpha$ (sauf si λ est de longueur 1).

Cette définition généralise les sommes de puissances des $(n-1)$ premiers entiers, définies par

$$d_k(n) = d_k((n)) = \sum_{j=1}^{n} (j-1)^k.$$

On a facilement

$$d_0(\lambda) = |\lambda|,$$

$$d_1(\lambda) = n(\lambda') - \frac{1}{\alpha} n(\lambda),$$

avec

$$n(\lambda) = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \binom{\lambda'_j}{2} = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} (i-1)\lambda_i.$$

Pour tous entiers $j, k \geq 0$ on pose

$$F_{jk}(\lambda) = P_{jk}\big(d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda), \dots\big)$$

$$= \sum_{|\mu|=j} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ k\end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} \left(\prod_{i \geq 1} d_i(\lambda)^{m_i(\mu)} \right).$$

Comme précédemment la sommation est limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leq k$, et on a $F_{jk}(\lambda) = 0$ pour tout $k > j$. On a par convention $F_{00}(\lambda) = 1$.

Pour tout couple λ, μ de partitions on pose

$$d_\mu(\lambda) = \prod_{i=1}^{l(\mu)} d_{\mu_i}(\lambda) = \prod_{i \geq 1} d_i(\lambda)^{m_i(\mu)}.$$

Lorsque $\mu = (0)$ il n'y aura aucun risque de confusion entre $d_{(0)}(\lambda) = 1$ et $d_0(\lambda) = |\lambda|$. On a ainsi

$$F_{jk}(\lambda) = \sum_{|\mu|=j} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ k\end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} d_\mu(\lambda).$$

Dans le cas d'une partition-ligne (n) on simplifie les notations en écrivant $F_{jk}(n)$ et $d_\mu(n)$ pour $F_{jk}((n))$ et $d_\mu((n))$. Ces quantités sont alors indépendantes de α.

4. UNE PROPRIÉTÉ REMARQUABLE

Soient x une indéterminée et n un entier ≥ 1. On note désormais

$$(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1),$$

$$[x]_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

les coefficients hypergéométriques "ascendant" et "descendant" classiques. On pose

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!}.$$

Les nombres de Stirling de première espèce sont définis par la fonction génératrice

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

On voit que $s(n,k)$ est ainsi égal à la fonction symétrique élémentaire d'ordre $(n-k)$ de $-1, -2, \ldots, -n+1$. Le signe de $s(n,k)$ est donc $(-1)^{n-k}$, et on a

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k.$$

Nous avons conjecturé le résultat suivant dès 1992. Il a été démontré en 1994 par Di Bucchianico et Loeb [1] au moyen d'une fonction génératrice. Indépendamment Rodica Simion [6] a donné depuis une preuve purement combinatoire.

THÉORÈME 1. *Pour tous entiers n, r, k on a*

$$\binom{n-1}{r-1}|s(r,k)| = r! \sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=k}} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu \\ r\end{matrix} \right\rangle}{z_\mu}.$$

Preuve. Nous donnons la preuve de Rodica Simion. La relation à démontrer s'écrit

$$\binom{n}{r}\frac{(n-1)!}{(r-1)!}|s(r,k)| = n! \sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=k}} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu \\ r\end{matrix} \right\rangle}{z_\mu}.$$

Nous allons voir que chaque membre de cette relation compte les couples (π, R), où R est un ensemble de r éléments, et π une permutation de n éléments ayant k cycles, dont chaque cycle contienne au moins un élément de R.

Rappelons qu'à toute permutation π est associée une partition μ qui est le "type cyclique" [5, Chap. 1, Sect. 7, p. 60] de π: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$ est la suite décroissante formée des ordres des cycles de π. Si π est une permutation de n éléments ayant k cycles, la partition μ est de poids n et de longueur k.

Au membre de droite nous comptons d'abord les permutations de n éléments ayant k cycles. Il y a $n!/z_\mu$ permutations de type μ, puis $\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle$ façons de construire l'ensemble R.

Au membre de gauche nous fixons d'abord l'ensemble R: il y a $\binom{n}{r}$ façons de le choisir. Puis $|s(r,k)|$ façons de choisir une permutation des r éléments de R ayant k cycles. Pour construire une permutation de n éléments ayant k cycles, et dont chaque cycle contienne au moins un élément de R, il reste $n-r$ éléments à insérer un par un dans ces k cycles. On voit facilement qu'il y a $r(r+1)\cdots(n-1)$ façons de le faire. ∎

On a deux cas-limites intéressants. D'abord pour $r=n$ on retrouve le résultat bien connu suivant ([4, Corollaire 3.3.13]; [5, Exercice 1.2.11]):

$$|s(n,k)| = \sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=k}} \frac{n!}{z_\mu},$$

qui dénombre les permutations de n éléments ayant k cycles.

D'autre part pour $r=k$ on retrouve la relation

$$\binom{n-1}{k-1} = \sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=k}} \frac{k!}{\prod_i m_i(\mu)!},$$

qui dénombre les multi-entiers ("compositions") $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, de longueur k et de poids n.

Le Théorème 1 possède la formulation équivalente suivante, obtenue en multipliant chaque membre par X^k (resp. $(-X)^k$) et en sommant sur $k=l(\mu)$.

THÉORÈME 1′. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers n, r on a*

$$\binom{n-1}{r-1}\binom{X+r-1}{r} = \sum_{|\mu|=n} \frac{\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)},$$

$$\binom{n-1}{r-1}\binom{X}{r} = \sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)}.$$

Dans chacune de ces relations, la sommation du membre de droite est en fait limitée aux partitions μ telles que $l(\mu)\le r$. Pour $r=n$ on retrouve les relations données au Chap. 1, Sect. 2 de [5] (en combinant la relation (2.14′) et l'Exemple 1).

Nous posons le problème d'obtenir des q-analogues du Théorème 1.

5. FORMULE DE CHU–VANDERMONDE

Nous formulons la conjecture suivante qui explicite le développement en série formelle de la formule classique de Chu–Vandermonde.

CONJECTURE 1. *Soient x et y deux indéterminées. Pour tout entier $n \geq 0$ on a*

$$\frac{(y-x)_n}{(y)_n} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i}{y^{i+j}} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{[n-j]_{i-k}}{(i-k)!} F_{jk}(n) \right).$$

Nous pouvons formuler une conjecture beaucoup plus générale. Pour cela soit x une indéterminée. Pour toute partition λ nous généralisons les coefficients hypergéométriques "ascendant" et "descendant" en posant

$$(x)_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} \left(x - \frac{1}{\alpha}(i-1) + j - 1 \right),$$

$$[x]_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} \left(x + \frac{1}{\alpha}(i-1) - j + 1 \right).$$

La Conjecture 1 est alors un cas particulier évident de la

CONJECTURE 2. *Soient x et y deux indéterminées. Pour toute partition λ on a*

$$\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} = \sum_{i=0}^{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i}{y^{i+j}} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{[|\lambda|-j]_{i-k}}{(i-k)!} F_{jk}(\lambda) \right)$$

ou de manière équivalente

$$\frac{[x+y]_\lambda}{[y]_\lambda} = \sum_{i=0}^{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^i}{y^{i+j}} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{[|\lambda|-j]_{i-k}}{(i-k)!} F_{jk}(\lambda) \right).$$

Nous écrivons $[|\lambda|-j]_{i-k}/(i-k)!$ et non $\binom{|\lambda|-j}{i-k}$ pour éviter une confusion, car l'entier $|\lambda|-j$ n'est pas nécessairement positif. Comme nous le verrons ultérieurement, nous avons vérifié ce développement en série formelle pour λ arbitraire, $j \geq 0$ arbitraire, et $i \leq 5$.

A partir de la définition de $(x)_\lambda$ on a immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} &= \exp\left(\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\log\left(1-\frac{x}{y+j-1-(i-1)/\alpha}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}\left(\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\left(y+j-1-\frac{(i-1)}{\alpha}\right)^{-k}\right)\right)\end{aligned}$$

où la seconde égalité résulte du développement en série

$$\log(1-u) = -\sum_{k\geq 1}\frac{u^k}{k}.$$

De même le développement binomial

$$(1+u)^{-k} = \sum_{r\geq 0}(-1)^r\frac{(k)_r}{r!}u^r$$

implique

$$\begin{aligned}\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} &= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{y}\right)^k\sum_{r\geq 0}(-1)^{r+1}\frac{1}{y^r}\frac{(k)_r}{r!}\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\left(j-1-\frac{i-1}{\alpha}\right)^r\right)\right)\\ &= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{y}\right)^k\sum_{r\geq 0}(-1)^{r+1}\frac{1}{y^r}\frac{(k)_r}{r!}d_r(\lambda)\right).\end{aligned}$$

On a ainsi fait apparaître les quantités $d_r(\lambda)$, avec $r \geq 0$. Finalement on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} &= \prod_{k\geq 1}\exp\left(\frac{1}{k}\left(\frac{x}{y}\right)^k\sum_{r\geq 0}(-1)^{r+1}\frac{1}{y^r}\frac{(k)_r}{r!}d_r(\lambda)\right)\\ &= \prod_{k\geq 1}\sum_{m_k\geq 0}\frac{1}{m_k!}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{x}{y}\right)^k\sum_{r\geq 0}(-1)^{r+1}\frac{1}{y^r}\frac{(k)_r}{r!}d_r(\lambda)\right)^{m_k}\\ &= \sum_\mu\left(\frac{x}{y}\right)^{|\mu|}\frac{(-1)^{l(\mu)}}{z_\mu}\prod_{k\geq 1}\left(\sum_{r\geq 0}(-1)^r\frac{1}{y^r}\frac{(k)_r}{r!}d_r(\lambda)\right)^{m_k(\mu)}.\end{aligned}$$

Posons $u = -1/y$. La Conjecture 2 est alors équivalente à la conjecture suivante, regardée comme une égalité de séries formelles.

CONJECTURE 3. *Soit* u *une indéterminée. Pour toute partition* λ *et tout entier* $n \geq 1$ *on a*

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} \prod_{k\geq 1} \left(\sum_{r\geq 0} u^r \frac{(k)_r}{r!} d_r(\lambda) \right)^{m_k(\mu)}$$
$$= \sum_{j\geq 0} u^j \left(\sum_{k=0}^{\min(n,j)} \frac{[d_0(\lambda) - j]_{n-k}}{(n-k)!} F_{jk}(\lambda) \right).$$

On peut obtenir une conjecture plus générale en supposant que la Conjecture 3 ne dépend pas de la définition des quantités $d_r(\lambda)$ et demeure vraie si celles-ci sont remplacées par des indéterminées *indépendantes*.

CONJECTURE 4. *Soient* u, X_0, *et* $X = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ *une famille infinie d'indéterminées indépendantes. Pour tout entier* $n \geq 1$ *on a*

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} \prod_{k\geq 1} \left(\sum_{r\geq 0} u^r \frac{(k)_r}{r!} X_r \right)^{m_k(\mu)}$$
$$= \sum_{j\geq 0} u^j \left(\sum_{k=0}^{\min(n,j)} \binom{X_0 - j}{n-k} P_{jk}(X) \right).$$

Nous avons vérifié cette conjecture pour $n \leq 5$. Elle est trivialement vérifiée pour $n = 1$. Pour $n = 2$ elle s'écrit

$$\tfrac{1}{2}\Big(X_0 + \sum_{r\geq 1} u^r X_r \Big)^2 - \tfrac{1}{2}\Big(X_0 + \sum_{r\geq 1} u^r (r+1) X_r \Big)$$
$$= \binom{X_0}{2} + \sum_{j\geq 1} u^j \big[(X_0 - j) X_j + P_{j2}(X) \big].$$

Soit encore

$$\tfrac{1}{2}\Big(\sum_{j\geq 1} u^j X_j \Big)^2 = \sum_{j\geq 1} u^j \big(P_{j2}(X) - \tfrac{1}{2}(j-1) X_j \big).$$

Ce qui est équivalent à la relation suivante, donnée ā la Section 2:

$$P_{j2}(X) = \tfrac{1}{2}(j-1)X_j + \tfrac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=j} X_{k_1}X_{k_2}.$$

De même la Conjecture 4 pour $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\Big(X_0 + \sum_{r\geq 1} u^r X_r\Big)^3 &- \frac{1}{2}\Big(X_0 + \sum_{r\geq 1} u^r (r+1) X_r\Big)\Big(X_0 + \sum_{r\geq 1} u^r X_r\Big)\\ &+ \frac{1}{3}\left(X_0 + \sum_{r\geq 1} u^r \frac{(r+1)(r+2)}{2} X_r\right)\\ &= \binom{X_0}{3} + \sum_{j\geq 1} u^j \Big(P_{j3}(X) + (X_0 - j) P_{j2}(X)\\ &\qquad + \frac{(X_0 - j)(X_0 - j - 1)}{2} X_j\Big).\end{aligned}$$

Le lecteur pourra la vérifier facilement à l'aide des expressions données ā lā Section 2 pour P_{j2} et P_{j3}.

Revenons au cas général de la Conjecture 4, avec n fixé *arbitraire*. Du développement multinomial classique

$$\Big(X_0 + \sum_{r\geq 1} a_r X_r\Big)^{m_k} = \sum_{\beta} \frac{m_k!}{(m_k - \Sigma_{r\geq 1}\beta_r)!} X_0^{m_k - \Sigma_{r\geq 1}\beta_r} \prod_{r\geq 1} \frac{1}{\beta_r!}(a_r X_r)^{\beta_r},$$

où la sommation a lieu sur les multi-entiers $\beta = \{\beta_r,\ r \geq 1\}$, on déduit immédiatement

$$\begin{aligned}\prod_{k\geq 1}\left(\sum_{r\geq 0} u^r \frac{(k)_r}{r!} X_r\right)^{m_k(\mu)} &= \prod_{k\geq 1}\Bigg(\sum_{\beta^{(k)}} \frac{m_k(\mu)!}{(m_k(\mu) - \Sigma_{r\geq 1}\beta_r^{(k)})!} X_0^{m_k(\mu) - \Sigma_{r\geq 1}\beta_r^{(k)}}\\ &\qquad \times \prod_{r\geq 1} \frac{1}{\beta_r^{(k)}!}\left(u^r \frac{(k)_r}{r!} X_r\right)^{\beta_r^{(k)}}\Bigg).\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\prod_{k\geq 1}\left(\sum_{r\geq 0} u^r \frac{(k)_r}{r!} X_r\right)^{m_k(\mu)} = \sum_{j\geq 0} u^j \sum_{|\nu|=j} c^{\nu}_{\mu,j}(X_0)\Big(\prod_{r\geq 1} X_r^{m_r(\nu)}\Big),$$

où l'on a posé

$$c^{\nu}_{\mu,j}(X_0) = \sum_{S_\nu}\prod_{k\geq 1}\frac{m_k(\mu)!}{\left(m_k(\mu)-\sum_{r\geq 1}\beta_r^{(k)}\right)!} X_0^{m_k(\mu)-\sum_{r\geq 1}\beta_r^{(k)}}$$
$$\times \prod_{r\geq 1}\frac{1}{\beta_r^{(k)}!}\left(\frac{(k)_r}{r!}\right)^{\beta_r^{(k)}}.$$

Ici j est un entier ≥ 0, ν une partition telle que $|\nu| = j$, et la sommation a lieu sur la famille $S_\nu = \{\beta^{(k)}, k\geq 1\}$ des multi-entiers $\beta^{(k)} = \{\beta_r^{(k)}, r\geq 1\}$ qui satisfont pour tout $r\geq 1$, $\sum_{k\geq 1}\beta_r^{(k)} = m_r(\nu)$.

La Conjecture 4 est alors équivalente à la conjecture suivante.

CONJECTURE 5. *Soit X_0 une indéterminée. Pour tous entiers $n, j\geq 1$ et pour toute partition ν telle que $|\nu| = j$, on a*

$$\sum_{|\mu|=n}\frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} c^{\nu}_{\mu,j}(X_0) = \sum_{k=1}^{\min(n,j)}\binom{X_0-j}{n-k}\frac{\left\langle {\nu \atop k}\right\rangle}{z_\nu}.$$

Bien que cette conjecture puisse paraître très compliquée, il est facile de l'expliciter lorsque la partition ν prend une forme simple.

6. PREMIER CAS PARTICULIER

Le cas le plus élémentaire, et le plus spectaculaire, est celui où $\nu = (j)$. On a alors facilement

$$\frac{\left\langle {\nu \atop k}\right\rangle}{z_\nu} = \frac{\binom{j}{k}}{j},$$

$$c^{\nu}_{\mu,j}(X_0) = \sum_{k\geq 1} m_k(\mu)\Big(\prod_{r\neq k} X_0^{m_r(\mu)}\Big) X_0^{m_k(\mu)-1}\frac{(k)_j}{j!}.$$

La Conjecture 5 prend alors la forme suivante.

CONJECTURE 6. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, s \geq 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \sum_{k=1}^{\min(n,s)} \binom{X-s}{n-k} \binom{s}{k}.$$

Nous avons vérifié cette conjecture pour $n \leq 6$ et s arbitraire. On peut développer μ_i^r sur les fonctions $(\mu_i)_s$ $(1 \leq s \leq r)$ et en déduire facilement la conjecture suivante.

CONJECTURE 7. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r \geq 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i^r \right)$$
$$= \frac{(n-r)!}{(n-1)!} \binom{X-r}{n-r} \left(\prod_{i=1}^{r-1} (X-ni) - c_r(n,X) \right),$$

où $c_r(n,X)$ est un polynôme en n et X, à coefficients entiers relatifs. En particulier $c_r(n,X)$ est égal à

$$\begin{array}{ll} 0, & \textit{pour } r = 1,2,3, \\ (n-1)X(X-n), & \textit{pour } r = 4, \\ 5(n-1)X(X-n)(X-2n), & \textit{pour } r = 5, \\ (n-1)X(X-n)(16X^2+11X-79nX+86n^2-4n-4), & \textit{pour } r = 6. \end{array}$$

Nous n'avons pu obtenir une expression de $c_r(n,X)$ pour r arbitraire. On peut facilement démontrer la Conjecture 7 pour les basses valeurs de n. On a par exemple

$$c_r(2,X) = \prod_{i=1}^{r-1} (X-2i) - (X-2^{r-1}) \prod_{i=2}^{r-1} (X-i) \qquad (r \geq 2),$$

$$c_r(3,X) = \prod_{i=1}^{r-1} (X-3i) - \left(X^2 - (2^r+1)X + 2.3^{r-1}\right) \prod_{i=3}^{r-1} (X-i)$$
$$(r \geq 3).$$

7. AUTRES CAS PARTICULIERS

Un autre cas particulier où la Conjecture 5 est facile à expliciter est celui où $\nu = 1^{j}$. On a alors

$$\frac{\left\langle \begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right\rangle}{z_\nu} = \frac{\delta_{jk}}{j!},$$

$$c^{\nu}_{\mu,j}(X_0) = \sum \prod_{k \geq 1} \frac{m_k(\mu)!}{\left(m_k(\mu) - \beta_1^{(k)}\right)!} X_0^{m_k(\mu) - \beta_1^{(k)}} \frac{1}{\beta_1^{(k)}!} k^{\beta_1^{(k)}},$$

où la sommation a lieu sur tous les multi-entiers $\{\beta_1^{(k)},\ k \geq 1\}$ tels que $\sum_{k \geq 1} \beta_1^{(k)} = j$. On en déduit facilement la

CONJECTURE 8. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r \geq 1$ on a*

$$\binom{X - r}{n - r} = r! \sum_{|\mu| = n} (-1)^{n - l(\mu)} \frac{X^{l(\mu) - r}}{z_\mu} \left(\sum_{\substack{\rho \\ l(\rho) = r}} \prod_{k \geq 1} \binom{m_k(\mu)}{m_k(\rho)} k^{m_k(\rho)} \right).$$

Le développement du membre de droite est bien sûr un polynôme en X. En effet le coefficient de $X^{l(\mu) - r}$ est nécessairement nul lorsque $l(\mu) < r$. Nous avons vérifié cette conjecture pour $n \leq 6$ et r arbitraire.

Ces deux situations élémentaires sont elles-mêmes un cas particulier de la situation où ν est une équerre $(s, 1^t)$ avec $s + t = j$. On a alors

$$\frac{\left\langle \begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right\rangle}{z_\nu} = \frac{\binom{s}{k - t}}{t!s} \qquad (k \geq t + 1).$$

Le membre de gauche est nul si $k < t + 1$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} c^{\nu}_{\mu,j}(X_0) &= \sum \prod_{k \geq 1} \frac{m_k(\mu)!}{\left(m_k(\mu) - \beta_1^{(k)} - \beta_s^{(k)}\right)!} X_0^{m_k(\mu) - \beta_1^{(k)} - \beta_s^{(k)}} \\ &\qquad \times \frac{1}{\beta_1^{(k)}!} k^{\beta_1^{(k)}} \frac{1}{\beta_s^{(k)}!} \left(\frac{(k)_s}{s!} \right)^{\beta_s^{(k)}}. \\ &= \sum \frac{m_h(\mu)!}{\left(m_h(\mu) - \beta_1^{(h)} - 1\right)!} X_0^{m_h(\mu) - \beta_1^{(h)} - 1} \frac{1}{\beta_1^{(h)}!} h^{\beta_1^{(h)}} \frac{(h)_s}{s!} \\ &\qquad \times \prod_{k \neq h} \frac{m_k(\mu)!}{\left(m_k(\mu) - \beta_1^{(k)}\right)!} X_0^{m_k(\mu) - \beta_1^{(k)}} \frac{1}{\beta_1^{(k)}!} k^{\beta_1^{(k)}}, \end{aligned}$$

où la sommation a lieu sur les entiers $h \geq 1$ et les multi-entiers $\{\beta_1^{(k)}, k \geq 1\}$ tels que $\sum_{k \geq 1} \beta_1^{(k)} = t$. On en déduit la

CONJECTURE 9. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, s, t \geq 1$ on a*

$$\frac{(s-1)!}{t!} \sum_{k=t+1}^{\min(n,s+t)} \binom{X-s-t}{n-k} \binom{s}{k-t}$$
$$= \sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)-t-1}}{z_\mu} \left(\sum_{\substack{\rho \\ l(\rho)=t+1}} \left(\prod_{k \geq 1} \binom{m_k(\mu)}{m_k(\rho)} k^{m_k(\rho)} \right) \times \left(\sum_{h \geq 1} m_h(\rho) \frac{(h)_s}{h} \right) \right).$$

Le développement du membre de droite est bien sûr un polynôme en X. En effet le coefficient de $X^{l(\mu)-t-1}$ est nul lorsque $l(\mu) < t+1$. Nous avons vérifié cette conjecture pour $n \leq 6$, avec s et t arbitraires. On retrouve les Conjectures 6 et 8 pour respectivement $t = 0$ et $s = 1$.

8. UNIFICATION DE LA CONJECTURE 6 ET DU THÉORÈME 1

La Conjecture 6 est une intéressante généralisation du cas particulier $s = 1$, qui est bien connu [5, Exemple 1.2.1] et s'écrit

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)}}{z_\mu} = \binom{X}{n}.$$

Mais le Théorème 1′ a également généralisé la même relation comme suit

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)} = \binom{n-1}{r-1} \binom{X}{r}.$$

Ces deux généralisations paraissent *a priori* très différentes, mais nous sommes parvenus à les unifier dans l'élégante conjecture suivante.

CONJECTURE 10. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r, s \geq 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right)$$

$$= (s-1)! \binom{s+n-1}{n-r} \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \binom{X-s}{r-k} \binom{s}{k}.$$

La sommation du membre de gauche est bien sûr limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leq r$. Nous avons vérifié cette conjecture pour $n \leq 6$ avec r et s arbitraires.

Pour $s = 1$ la conjecture est vérifiée car on retrouve le Théorème 1′:

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)} = \frac{X}{n} \binom{n}{r} \binom{X-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1} \binom{X}{r}.$$

Pour $r > n$ l'identité est triviale. Pour $r = n$ on retrouve la Conjecture 6.

La Conjecture 10 est vérifiée pour $r = 1$ et $r = 2$. Pour $r = 1$ elle s'écrit

$$(n)_s = s! \binom{s+n-1}{s}.$$

Pour $r = 2$ et $s \geq 2$, le lecteur vérifiera facilement que la conjecture s'écrit

$$-\frac{n-1}{2} (n)_s + X \sum_{k=1}^{n-1} (k)_s = (s-1)! \binom{s+n-1}{n-2} \left((X-s)s + \binom{s}{2} \right).$$

Ce qui équivaut à la relation suivante:

$$\sum_{k=1}^{n} (k)_s = s! \binom{s+n}{n-1}.$$

Celle-ci est elle-même une conséquence de la relation classique

$$\binom{s+n}{s+1} = \sum_{k=s}^{s+n-1} \binom{k}{s}.$$

La Conjecture 10 possède la formulation équivalente suivante obtenue en changeant X en $-X$.

CONJECTURE 10′. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r, s \geq 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right)$$

$$= (s-1)! \binom{s+n-1}{n-r} \sum_{k=1}^{\min(r,s)} (-1)^{k-1} \binom{X+r+s-k-1}{r-k} \binom{s}{k}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Di Bucchianico and D. E. Loeb, A proof of Lassalle's harmonic number conjecture, *Abstracts Amer. Math. Soc.* **97** (1994), 538.
2. M. Lassalle, Some combinatorial conjectures for Jack polynomials, *Ann. Combinatorics,* **2** (1998), to appear.
3. M. Lassalle, Some combinatorial conjectures for shifted Jack polynomials, *Ann. Combinatorics*, **3** (1998), to appear.
4. D. E. Leb and G. C. Rota, Formal power series of logarithmic type, *Adv. in Math.* **75** (1989), 1–118.
5. I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed., Clarendon, Oxford, 1995.
6. R. Simion, Private communication.